

Tentamen Algoritmen en Datastructuren

woensdag 29 oktober 2008, 9 - 12 uur

Het tentamencijfer T is $(p/10) + 1$, waarbij p het totaal aantal behaalde punten is.

Met de zinsnede 'geef een algoritme' in een opgave wordt bedoeld:

**beschrijf een algoritme in pseudocode (dus niet in Java),
licht de werking ervan toe,
beargumenteer de correctheid.**

- (30 punt) Deze opgave gaat over sorteren van lijsten gehele getallen. Vergelijken van twee getallen gaat in $O(1)$ tijd. n is het aantal getallen in de lijst. Alle getallen in de lijst zijn verschillend.
 - Geef het algoritme merge-sort, en laat zien dat de tijdscomplexiteit $O(n \log n)$ is.
 - Laat zien dat de tijdscomplexiteit van een sorteeralgoritme dat op het vergelijken van getallen gebaseerd is, nooit beter kan zijn dan $O(n \log n)$.
 - Nu is tevens gegeven dat alle getallen van de lijst liggen in het interval $[0, 100 * n - 1]$. Geef een algoritme dat de lijst sorteert in $O(n)$ tijd. Hoeveel geheugen gebruikt het algoritme?
- (30 punt) Het algoritme van Dijkstra vindt, in een gewogen ongerichte graaf G met daarin knoop u , voor elke knoop v in G de lengte van een kortste pad van u naar v . De gewichten zijn niet negatief. Neem aan dat G samenhangend en enkelvoudig is (geen self-loops, geen parallelle kanten), en verder dat G n knopen en m kanten bevat.

Het globale idee van Dijkstra's algoritme is om het probleem stapsgewijs op te lossen, en daarbij in elke knoop bij te houden wat de lengte van het tot dan toe gevonden kortste pad is. Bij elke stap wordt de verzameling van 'afgehandelde' knopen uitgebreid met de knoop buiten de verzameling met de laagste padwaarde, en wordt de padwaarde van een aantal knopen aangepast (*edge relaxation*).

Geef het algoritme van Dijkstra, en analyseer de tijdscomplexiteit. Je mag gebruik maken van een efficiënte *priority queue*. Geef ook aan welke datastructuur je kiest voor het representeren van de graaf, en waarom.

- (30 punt) Leg het principe van de discrete Fouriertransformatie uit en de toepassing ervan bij het vermenigvuldigen van polynomen. Gebruik (en definieer) daarbij de volgende begrippen:

de interpolatiestelling voor polynomen,
primitieve n -de eenheidswortels ω ,
de matrix F met $F[i, j] = \omega^{ij}$ en zijn inverse F^{-1} met $F^{-1}[i, j] = \omega^{-ij}/n$,
de convolutiestelling.